



2023 年全国硕士研究生招生考试

数学试题及参考答案

（数学一）

（科目代码：301）

一、选择题:1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项

中,只有一个选项是符合题目

要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x-1})$ 的渐近线方程为()

(A) $y = x + e$

(B) $y = x + \frac{1}{e}$

(C) $y = x$

(D) $y = x - \frac{1}{e}$

【答案】(B)

【解析】 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(e + \frac{1}{x-1})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x-1}) = 1,$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \ln(e + \frac{1}{x-1}) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(e + \frac{1}{x-1}) - 1]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln[1 + \frac{1}{e(x-1)}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e(x-1)} = \frac{1}{e}.$$

所以斜渐近线方程为 $y = x + \frac{1}{e}$.

(2) 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则()

(A) $a < 0, b > 0$

(B) $a > 0, b > 0$

(C) $a = 0, b > 0$

(D) $a = 0, b < 0$

【答案】(C)

【解析】微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$

当 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ 时, 特征方程有两个不同的实根 λ_1, λ_2 , 则 λ_1, λ_2 至少有一个

不等于零, 若 C_1, C_2 都不为零, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$

无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b = 0$ 时, 特征方程有两个相同的实根, $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$,

若 $C_2 \neq 0$, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b < 0$ 时, 特征方程的根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} i$,

则通解为 $y = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} x)$,

此时, 要使微分方程的解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界, 则 $a = 0$, 再由 $\Delta = a^2 - 4b < 0$, 知 $b > 0$.

(3) 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定, 则()

- (A) $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在 (B) $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续
(C) $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在 (D) $f''(0)$ 存在, $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

【答案】 (C)

【解析】 $t \geq 0$ 时, $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \sin t \end{cases}$, 得 $y = \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$; $t < 0$ 时, $\begin{cases} x = t \\ y = -t \sin t \end{cases}$, 得 $y = -x \sin x$;

综上, $y = \begin{cases} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}, x \geq 0 \\ -x \sin x, x < 0 \end{cases}$,

从而由 $y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} - 0}{x} = 0$, $y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sin x - 0}{x} = 0$, 得 $y'(0) = 0$;

于是 $y' = \begin{cases} \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{x}{9} \cos \frac{x}{3}, x > 0 \\ 0, x = 0, \text{得 } y' \text{ 连续;} \\ -\sin x - x \cos x, x < 0 \end{cases}$

又由 $y_+''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{x}{9} \cos \frac{x}{3} - 0}{x} = \frac{2}{9}$, $y_+''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x - x \cos x - 0}{x} = -2$,

得 $y''(0)$ 不存在.

(4) 已知 $a_n < b_n (n=1, 2, \dots)$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则“ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛”

是“ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛的” ()

- (A) 充分必要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

【答案】 (A)

【解析】 由条件知 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 为收敛的正项级数, 进而绝对收敛;

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则由 $|b_n| = |b_n - a_n + a_n| \leq |b_n - a_n| + |a_n|$ 与比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

绝对收敛;

设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则由 $|a_n| = |a_n - b_n + b_n| \leq |b_n - a_n| + |b_n|$ 与比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

绝对收敛.

(5) 已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = 0$, E 为 n 阶单位矩阵, 记矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ BC & E \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} AB & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & 0 \end{pmatrix}$ 的秩分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, 则 ()

- (A) $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3$ (B) $\gamma_1 \leq \gamma_3 \leq \gamma_2$
(C) $\gamma_3 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$ (D) $\gamma_2 \leq \gamma_1 \leq \gamma_3$

【答案】 (B)

【解析】 因初等变换不改变矩阵的秩,

$$r_1 = r \begin{bmatrix} 0 & A \\ BC & E \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -ABC & 0 \\ BC & E \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ BC & E \end{bmatrix} = n,$$

$$r_2 = r \begin{bmatrix} AB & C \\ 0 & E \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = r(AB) + n,$$

$$r_3 = r \begin{bmatrix} E & AB \\ AB & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} E & 0 \\ AB & -ABAB \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -ABAB \end{bmatrix} = r(ABAB) + n,$$

故选(B).

(6) 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】 (D)

【解析】 选项(A)矩阵的特征值为三个不同特征值，所以必可相似对角化；

选项(B)矩阵为实对称矩阵，所以必可相似对角化；

选项(C)矩阵特征值为1,2,2，二重特征值的重数 $2 = 3 - r(C - 2E)$ ，所以必可相似对角化；

选项(D)矩阵特征值为1,2,2，二重特征值的重数 $2 \neq 3 - r(D - 2E)$ ，所以不可相似对角化。

故选(D).

(7) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，若 γ 既可由 α_1, α_2 线性

表示，也可由 β_1, β_2 线性表示，则 $\gamma = (\quad)$

$$(A) k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in R$$

$$(B) k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in R$$

$$(C) k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in R$$

$$(D) k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in R$$

【答案】(D)

【解析】设 $r = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$,

则 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$.

$$\text{又 } (\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $(x_1, x_2, y_1, y_2)^T = c(-3, 1, -1, 1)^T, c \in R$.

所以 $r = -c\beta_1 + c\beta_2 = c(-1, -5, -8)^T = -c(1, 5, 8)^T = k(1, 5, 8)^T, k \in R$.

(8) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X - EX|) = (\quad)$

$$(A) \frac{1}{e}$$

$$(B) \frac{1}{2}$$

$$(C) \frac{2}{e}$$

$$(D) 1$$

【答案】(C)

【解析】由题可知 $E(X) = 1$, 所以 $|X - EX| = \begin{cases} 1, & X = 0 \\ X - 1, & X = 1, 2, \dots \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{故 } E(|X - EX|) &= 1 \cdot P\{X = 0\} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)P\{X = k\} \\ &= \frac{1}{e} + \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)P\{X = k\} - (0-1)P\{X = 0\} \\ &= \frac{1}{e} + E(X-1) - (0-1)\frac{1}{e} = \frac{2}{e}, \end{aligned}$$

故选(C).

(9) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的简单随机样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_m 为来自

$$E(|Y|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2 \cdot 2\sigma^2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} dy = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

$$E(a|X_1 - X_2|) = aE(|Y|) = a \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

由 $\hat{\sigma} = a|X_1 - X_2|$ 为 σ 的无偏估计, 有 $E(\hat{\sigma}) = \sigma$, 得 $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 故选(A).

二、填空题:11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bx^2 + \ln(1+x)}{e^{x^2} - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bx^2 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + x^2 + o(x^2) - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]} = 1,$$

可得 $a+1=0$, $b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, 即 $a=-1, b=2$, 故 $ab=-2$.

(12) 曲面 $z = x + 2y + \ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x+2y-z=0$

【解析】 $F(x, y, z) = x + 2y + \ln(1+x^2+y^2) - z,$

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = \left(1 + \frac{2x}{1+x^2+y^2}, 2 + \frac{2y}{1+x^2+y^2}, -1\right),$$

即在点 $(0,0,0)$ 处的法向量为 $(1,2,-1)$, 即切平面方程为 $x+2y-z=0$.

(13) 设 $f(x)$ 为周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 1-x, x \in [0,1]$, 若

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 0

【解析】 由 $f(x)$ 展开为余弦级数知, $f(x)$ 为偶函数. 由傅里叶系数计算公式有

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 (1-x) \cos n\pi x dx \\ &= 2 \left(\int_0^1 \cos n\pi x dx - \int_0^1 x \cos n\pi x dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 x d \sin n\pi x \right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d \sin n\pi x \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left(x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx \\ &= \frac{-2}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 \\ &= \frac{-2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1). \end{aligned}$$

$$\text{故 } a_{2n} = \frac{-1}{2n^2 \pi^2} (\cos 2n\pi - 1) = \frac{-1}{2n^2 \pi^2} (1 - 1) = 0.$$

(14) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) - f(x) = x$, $\int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 f(t+2) dt \quad (\text{令 } x = t+2) \\ &= \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 f(x+2) dx \\ &= \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 [f(x) + x] dx \\ &= \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_0^1 x dx \\ &= \int_0^1 x dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(15) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3,$

若 $\gamma^T \alpha_i = \beta^T \alpha_i (i=1,2,3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$ _____.

【答案】 $\frac{11}{9}$

【解析】

$$\gamma^T \alpha_1 = \beta^T \alpha_1 = 1 \Rightarrow k_1 \alpha_1^T \alpha_1 + k_2 \alpha_2^T \alpha_1 + k_3 \alpha_3^T \alpha_1 = 1 \Rightarrow k_1 \cdot 3 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{同理 } k_2 = -1, k_3 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{所以, } k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{11}{9}.$$

(16) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B(1, \frac{1}{3}), Y \sim B(2, \frac{1}{2})$ 则 $P\{X=Y\} =$

_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 因为 $X \sim B(1, \frac{1}{3})$, 所以 $X=0,1$;

$$Y \sim B(2, \frac{1}{2}), \text{ 所以 } Y=0,1,2.$$

又因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$\begin{aligned} P\{X=Y\} &= P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} \\ &= P\{X=0\}P\{Y=0\} + P\{X=1\}P\{Y=1\} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

三、解答题:17~22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演

算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设曲线 $y = y(x) (x > 0)$ 经过点 $(1, 2)$, 该曲线上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t) dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

【解析】 (I) 设点 (x, y) 处的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$, 故 y 轴的截距为 $y - y'x$, 则 $x = y - y'x$,

解得 $y = x(C - \ln x)$, 其中 C 为任意常数.

由 $y(1) = C = 2$, 故 $y(x) = x(2 - \ln x)$.

(II) 由(I)知 $f(x) = \int_1^x t(2 - \ln t) dt$, 故 $f'(x) = x(2 - \ln x) = 0$, 则驻点为 $x = e^2$.

当 $0 < x < e^2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e^2$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = e^2$ 处取得极大值,

同时也取得最大值, 且最大值为 $f(e^2) = \int_1^{e^2} x(2 - \ln x) dx = \frac{1}{4}e^4 - \frac{5}{4}$.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 的极值.

【解析】
$$\begin{cases} f'_x = -x(2y + 3xy - 5x^3) = 0 \\ f'_y = 2y - x^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$
, 得驻点为 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$.

$f''_{xx} = -(2y + 3xy - 5x^3) - x(3y - 15x^2)$, $f''_{xy} = -x(2 + 3x)$, $f''_{yy} = 2$.

代入 $(0, 0)$, $\begin{cases} A = f''_{xx} = 0 \\ B = f''_{xy} = 0 \\ C = f''_{yy} = 2 \end{cases}$, 则 $AC - B^2 = 0$, 故充分条件失效, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 取

$y = x^2 + kx^3 (k > 0)$, $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3) = kx^3[x^2 + (k-1)x^3] = kx^5 + o(x^5)$,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^5 + o(x^5)}{x^5} = k > 0$ ，由极限的局部保号性：存在 $\delta > 0$ ，当

$x \in (-\delta, 0)$ 时， $\frac{f(x, y)}{x^5} > 0$ ， $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$ ，当 $x \in (0, \delta)$ 时， $\frac{f(x, y)}{x^5} > 0$ ，

$f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ ，故 $(0, 0)$ 不是极值点；

代入 $(1, 1)$ ， $\begin{cases} A = f''_{xx} = 12 \\ B = f''_{xy} = -5 \\ C = f''_{yy} = 2 \end{cases}$ ，则 $AC - B^2 < 0$ ，故 $(1, 1)$ 不是极值点；

代入 $(\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$ 的 $\begin{cases} A = f''_{xx} = \frac{100}{27} \\ B = f''_{xy} = -\frac{8}{3} \\ C = f''_{yy} = 2 \end{cases}$ ，则 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$ ，故 $(\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$ 是极小值点；

故 $f(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = -\frac{4}{729}$ 为极小值。

(19) (本题满分 12 分)

设空间有界区域 Ω 中，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0$ 和 $x + z = 1$ 围成， Σ 为 Ω 边界的外侧，计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} 2xz dydz + xz \cos y dz dy + 3yz \sin x dx dy.$$

【解析】由高斯公式可得：

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} (2z - xz \sin y + 3y \sin x) dV \\ &= \iiint_{\Omega} 2z dV = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{1-x} 2z dz = \iint_{D_{xy}} (1-x)^2 dx dy \quad (D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1) \\ &= \iint_{D_{xy}} (1 - 2x + x^2) dx dy = \pi + \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有二阶连续导数，证明：

(I) 若 $f(x)=0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a) + f(-a)]$;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$ 使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2}|f(a) - f(-a)|.$$

【解析】(I) 证明: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2$, η 介于 0 与 x 之间,

$$\text{则 } f(a) = f'(0)a + \frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2, 0 < \eta_1 < a. \textcircled{1}$$

$$f(-a) = f'(0)(-a) + \frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2, -a < \eta_2 < 0. \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得: } f(a) + f(-a) = \frac{a^2}{2}[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)]. \textcircled{3}$$

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2, \eta_1]$ 上连续, 则必有最大值 M 与最小值 m , 即

$$, m \leq f''(\eta_1) \leq M, m \leq f''(\eta_2) \leq M, \text{ 从而 } m \leq \frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} \leq M.$$

由介值定理得: 存在 $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-a, a)$, 有 $\frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} = f''(\xi)$,

$$\text{代入 } \textcircled{3} \text{ 得: } f(a) + f(-a) = a^2 f''(\xi), \text{ 即 } f''(\xi) = \frac{f(a) + f(-a)}{a^2}.$$

(II) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in (-a, a)$ 取极值, 且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

又

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2, \gamma \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间,}$$

$$\text{则 } f(-a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a - x_0)^2, -a < \gamma_1 < 0.$$

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a - x_0)^2, 0 < \gamma_2 < a.$$

$$\text{从而 } |f(a) - f(-a)| = \left| \frac{1}{2}(a - x_0)^2 f''(\gamma_2) - \frac{1}{2}(a + x_0)^2 f''(\gamma_1) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} |(a-x_0)^2 f''(\gamma_2)| + \frac{1}{2} |(a+x_0)^2 f''(\gamma_1)|.$$

又 $|f''(x)|$ 连续, 设 $M = \max\{|f''(\gamma_1)|, |f''(\gamma_2)|\}$, 则

$$|f(a) - f(-a)| \leq \frac{1}{2} M (a+x_0)^2 + \frac{1}{2} M (a-x_0)^2 = M(a^2 + x_0^2)$$

又 $x_0 \in (-a, a)$, 则 $|f(a) - f(-a)| \leq M(a^2 + x_0^2) \leq 2Ma^2$,

则 $M \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$, 即存在 $\eta = \gamma_1$ 或 $\eta = \gamma_2 \in (-a, a)$,

有 $|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$,

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3$$

(I) 求可逆变换 $x = Py$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$;

(II) 是否存在正交变换 $x = Qy$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$.

【解析】(I) 利用配方法将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 和 $g(y_1, y_2, y_3)$ 化为规范形, 从而建立两者的关系.

先将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases}, \text{ 则 } f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + z_2^2.$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ 使得 } f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + z_2^2.$$

再将 $g(y_1, y_2, y_3)$ 化为规范形.

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3 = y_1^2 + (y_2 + y_3)^2$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3, \text{ 则 } g(y_1, y_2, y_3) = z_1^2 + z_2^2. \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 使得 } g(y_1, y_2, y_3) = z_1^2 + z_2^2.$$

$$\text{从而有} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{于是可得} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 为所求矩阵,}$$

可将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$.

$$\text{(II) 二次型 } f(x_1, x_2, x_3) \text{ 和 } g(y_1, y_2, y_3) \text{ 的矩阵分别为 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由题意知,若存在正交变换 $x = Qy$, 则 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = B$, 可得 A 和 B 相似.

易知 $\text{tr}(A) = 5, \text{tr}(B) = 3$, 从而 A 和 B 不相似, 于是不存在正交变换 $x = Qy$,

使得 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$.

(22) (本题满分 12 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(I) 求 X 与 Y 的方差;

(II) 求 X 与 Y 是否相互独立;

(iii) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度.

【解析】(i) $E(X) = \iint_D x \frac{2}{\pi} (x^2 + y^2) d\sigma = 0;$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \iint_D x^2 \frac{2}{\pi} (x^2 + y^2) d\sigma = 4 \iint_{D_1} x^2 \frac{2}{\pi} (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= \frac{4}{\pi} \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^2 d\sigma \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^5 dr = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

所以 $D(X) = \frac{1}{3}.$

同理, 得 $D(Y) = \frac{1}{3}.$

$$(ii) f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi} (x^2 + y^2) dy, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{3\pi} (1 + 2x^2) \sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

同理, 得: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{3\pi} (1 + 2y^2) \sqrt{1-y^2}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$

因为, $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, 所以 X 与 Y 不相互独立.

(iii) $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X^2 + Y^2 \leq z\}$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0;$

当 $0 \leq z < 1$ 时, $F_Z(z) = \iint_{D_z} \frac{2}{\pi} (x^2 + y^2) d\sigma = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} r^3 dr = z^2;$

当 $z \geq 1$ 时, $F_Z(z) = 1;$

所以, Z 的概率密度为 $f_Z(z) = \begin{cases} 2z, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$