2023 年全国硕士研究生招生考试

数学试题及参考答案

（数学二）

（科目代码：302）

启航学校

Qihang School

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程是(　　)

(A) $y=x+e$　　　　(B) $y=x+\dfrac{1}{e}$

(C) $y=x$　　　　(D) $y=x-\dfrac{1}{e}$

【答案】 (B)

【解析】 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln(e+\dfrac{1}{x-1})}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\dfrac{1}{x-1})=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x-1})-x]=\lim_{x\to\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x-1})-1]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln[1+\frac{1}{e(x-1)}]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e(x-1)}=\frac{1}{e}.$$

所以斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{e}.$

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},x\le 0\\(x+1)\cos x,x>0\end{cases}$ 的原函数为(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right),x\le 0\\(x+1)\cos x-\sin x,x>0\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1,x\le 0\\(x+1)\cos x-\sin x,x>0\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right),x\le 0\\(x+1)\sin x+\cos x,x>0\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1,x\le 0\\(x+1)\sin x+\cos x,x>0\end{cases}$

【答案】 (D)

【解析】当 $x\le 0$ 时，

$\int f(x)dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C_1$

当$x>0$时，

$\int f(x)dx=\int (x+1)\cos xdx=\int (x+1)d\sin x=(x+1)\sin x-\int \sin xdx$

$=(x+1)\sin x+\cos x+C_2$

原函数在$(-\infty,+\infty)$内连续，则在$x=0$处

$\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C_1=C_1$， $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)\sin x+\cos x+C_2=1+C_2$

所以$C_1=1+C_2$， 令$C_2=C$， 则$C_1=1+C$， 故

$\int f(x)dx=\begin{cases}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1+C, x\le 0\\(x+1)\sin x+\cos x+C, x>0\end{cases}$，

结合选项， 令$C=0$， 则$f(x)$的一个原函数为$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, x\le 0\\(x+1)\sin x+\cos x, x>0\end{cases}$.

(3)设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$满足$x_1=y_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\sin x_n, y_{n+1}=y_n^2$，当$n\to\infty$时(　　)

(A) x_n是y_n的高阶无穷小　　(B) y_n是x_n的高阶无穷小

(C) x_n是y_n的等价无穷小　　(D) x_n是y_n的同阶但非等价无穷小

【答案】(B)

【解析】在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$中，$\frac{2}{\pi}x<\sin x$

故$x_{n+1}=\sin x_n>\frac{2}{\pi}x_n$

$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n$

$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}<\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y_n}{x_n}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{y_n}{x_n}=\cdots=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\frac{y_1}{x_1}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$.故$y_n$是$x_n$的高阶无穷小.

(4)已知微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则 a,b 的取值范围为(　　)

(A) $a<0,b>0$　　(B) $a>0,b>0$

(C) $a=0,b>0$　　(D) $a=0,b<0$

【答案】(C)

【解析】微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，

当 $\Delta=a^2-4b>0$ 时，特征方程有两个不同的实根 λ_1,λ_2，则 λ_1,λ_2 至少有一个不等于零，

若 C_1,C_2 都不为零，则微分方程的解 $y=C_1e^{-\lambda_1 x}+C_2e^{-\lambda_2 x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界；

当 $\Delta=a^2-4b=0$ 时，特征方程有两个相同的实根，$\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}$，

若 $C_2\neq 0$，则微分方程的解 $y=C_1e^{-\frac{a}{2}x}+C_2xe^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界；

当 $\Delta=a^2-4b<0$ 时，特征方程的根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$，

则通解为 $y=e^{-\frac{a}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x)$，

此时，要使微分方程的解在 $(-\infty,+\infty)$ 有界，则 $a=0$，再由 $\Delta=a^2-4b<0$，知 $b>0$.

(5)设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则(　　)

(A) $f(x)$ 连续，$f'(0)$ 不存在

(B) $f'(0)$ 不存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

(C) $f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在

(D) $f''(0)$ 存在，$f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

启航学校 Qihang School

【答案】(C)

【解析】 1)当$t>0$时，$\begin{cases}x=3t\\y=t\sin t\end{cases}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t+t\cos t}{3}$；

当$t<0$时，$\begin{cases}x=t\\y=-t\sin t\end{cases}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t-t\cos t}{1}$；

当$t=0$时，因为$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t\sin t}{3t}=0$；

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{-t\sin t}{t}=0$，

所以$f'(0)=0$.

2) $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t+t\cos t}{3}=0=f'(0);\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{-\sin t-t\cos t}{3}=0=f'(0);$

所以$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$，即$f'(x)$在$x=0$连续.

3)当$t=0$时，因为$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t+t\cos t}{3\cdot3t}=\dfrac{2}{9}$；

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{-\sin t-t\cos t}{t}=-2$

所以$f''(0)$不存在.

(6)若函数$f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}dx$在$\alpha=\alpha_0$处取得最小值，则$\alpha_0$=(　　)

(A) $-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$　　(B) $-\ln(\ln 2)$

(C) $-\dfrac{1}{\ln 2}$　　(D) $\ln 2$

【答案】(A)

【解析】当$\alpha>0$时$f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}dx=-\dfrac{1}{(\ln x)^{\alpha}}\cdot\dfrac{1}{\alpha}\Big|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\dfrac{1}{\alpha}$

所以$f'(\alpha)=-\dfrac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{\ln\ln 2}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha}+\ln\ln 2\right)=0$，即$\alpha_0=-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$.

启航学校 Qihang School ®

(7)设函数$f(x)=(x^2+a)e^x$，若$f(x)$没有极值点，但曲线$y=f(x)$有拐点，则a的取值范围是(　　)

(A) $[0,1)$　　　　(B) $[1,+\infty)$

(C) $[1,2)$　　　　(D) $[2,+\infty)$

【答案】(C)

【解析】$f(x)=\left(x^2+a\right)e^x, f'(x)=\left(x^2+a+2x\right)e^x$，$f''(x)=\left(x^2+4x+a+2\right)e^x$，由于$f(x)$无极值点，所以$4-4a\le 0$，即$a\ge 1$；由于$f(x)$有拐点，所以$16-4(a+2)>0$，即$a<2$；综上所述$a\in[1,2)$.

(8)设A,B为n阶可逆矩阵，E为n阶单位矩阵，M^*为矩阵M的伴随矩阵，则$\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^*=$(　　)

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ 0 & A^*B^* \end{pmatrix}$　　　　(B) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$　　　　(D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

【答案】(D)

【解析】结合伴随矩阵的核心公式，代入(D)计算知

$$\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B|AA^* & -AA^*B^*+|A|B^* \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |B||A|E & -|A|B^*+|A|B^* \\ O & |A||B|E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B||A|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix}=|A||B|E_{2n}$$，故(D)正确.

(9)二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$的规范形为(　　)

(A) $y_1^2+y_2^2$　　　　(B) $y_1^2-y_2^2$

(C) $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　　　(D) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】(B)

【解析】由已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$，

则其对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-3&4\\1&4&-3\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda+3&-4\\-1&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+7)(\lambda-3)=0$，得 A 的特征值为 $3,-7,0$

故选(B).

(10)已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，若 γ 既可由 α_1，α_2 线性表示，也可由 β_1，β_2 线性表示，则 $\gamma=$(　　)

(A) $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$

(B) $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$

(C) $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$

(D) $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

【答案】(D)

【解析】设 $r=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，则 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0$.

又 $(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&-5&0\\3&1&-9&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$,

故 $(x_1,x_2,y_1,y_2)^T=c(-3,1,-1,1)^T,c\in R$.

所以 $r=-c\beta_1+c\beta_2=c(-1,-5,-8)^T=-c(1,5,8)^T=k(1,5,8)^T,k\in R$.

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11)当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$________.

【答案】-2

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}=\dfrac{ax+bx^2+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x^2+o(x^2)-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}=1$ 可得

$a+1=0$， $b-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$， 即 $a=-1,b=2$，$ab=-2$.

(12) 曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$ 的弧长为________.

【答案】 $\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$

【解析】 $y'=\sqrt{3-x^2}$， 由弧长公式可得 $l=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y'}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx \underline{\underline{x=2\sin t}}$

$2\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2 t dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}1+\cos 2t dt=\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$.

(13)设函数 $z=z(x,y)$ 由 $e^z+xz=2x-y$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\right|_{(1,1)}=$________.

【答案】 $-\dfrac{3}{2}$

【解析】两边同时对 x 求导得： $e^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+z+x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=2-0$ ①

两边再同时对 x 求导得： $e^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^z\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ ②

将 x=1，y=1 代入原方程得 $e^z+z=1\Rightarrow z=0$

代入①式得 $e^0\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+0+\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$

代入②式得 $e^0\cdot 1+e^0\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+1+1+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\Rightarrow\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{3}{2}$.

(14)曲线 $3x^3=y^5+2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为________.

【答案】$-\frac{11}{9}$

【解析】两边对x求导：$9x^2=5y^4\cdot y'+6y^2\cdot y'$ ①

当$x=1$时，代入原方程得 $3=y^5+2y^3\Rightarrow y=1$

将$x=1,y=1$代入①式得$9=5y'+6y'\Rightarrow y'|_{(1,1)}=\frac{9}{11}$，

所以曲线在$x=1$处的法线斜率为 $-\frac{11}{9}$.

(15)设连续函数$f(x)$满足：$f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)dx=0$，则$\int_1^3 f(x)dx=$

________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$$
\begin{aligned}
&=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x+2)dx\\
&=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1[f(x)+x]dx\\
&=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xdx\\
&=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 xdx\\
&=0+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(16)已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中a，b为常数，若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$

则，$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$________.

【答案】8

【解析】由已知$r(A)=r(A,b)\le 3<4$，故$|A,b|=0$

即 $|A,b|=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+2\cdot 4=0$

故 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=8$.

三、解答题:17～22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设曲线 L： $y=y(x)(x>e)$ 经过点 $(e^2,0)$，L 上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距，

(Ⅰ)求 $y(x)$.

(Ⅱ)在 L 上求一点，使该点的切线与两坐标轴所围三角形面积最小，并求此最小面积.

【解析】(Ⅰ)曲线 L 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，则切线在 y 轴上的截距为 $Y=y-xy'$，则 $x=y-xy'$，即 $y'-\frac{1}{x}y=-1$，解得 $y(x)=x(C-\ln x)$，其中 C 为任意常数.

又 $y(e^2)=0$，则 $C=2$，故 $y(x)=x(2-\ln x)$.

(Ⅱ)设曲线 L 在点 $(x,x(2-\ln x))$ 处的切线与两坐标轴所围三角形面积最小，此时切线方程为

$$Y-x(2-\ln x)=(1-\ln x)(X-x).$$

令 $Y=0$，则 $X=\dfrac{x}{\ln x-1}$；令 $X=0$，则 $Y=x$.

故切线与两坐标轴所围三角形面积为 $S(x)=\dfrac{1}{2}XY=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{\ln x-1}\cdot x=\dfrac{x^2}{2(\ln x-1)}$，

则 $S'(x)=\dfrac{x(2\ln x-3)}{2(\ln x-1)^2}$. 令 $S'(x)=0$，得驻点 $x=e^{\frac{3}{2}}$.

当 $e<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$S'(x)<0$；当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$S'(x)>0$，故 $S(x)$ 在 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 处取得极小值，同时也取最小值，且最小值为 $S(e^{\frac{3}{2}})=e^3$.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{\cos y}+\dfrac{x^2}{2}$ 的极值.

【解析】 $\begin{cases} f'_x=e^{\cos y}+x=0 \\ f'_y=xe^{\cos y}(-\sin y)=0 \end{cases}$，得驻点为：$(-e^{-1},k\pi)$，其中 k 为奇数；$(-e,k\pi)$，其中 k 为偶数.

则 $\begin{cases} f''_{xx}=1 \\ f''_{xy}=e^{\cos y}(-\sin y) \\ f''_{yy}=xe^{\cos y}\sin^2 y+xe^{\cos y}(-\cos y) \end{cases}$

代入 $(-e^{-1},k\pi)$，其中 k 为奇数，得 $\begin{cases} A=f''_{xx}=1 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=-e^{-2} \end{cases}$，$AC-B^2<0$，故 $(-e^{-1},k\pi)$ 不是极值点；

代入 $(-e,k\pi)$，其中 k 为偶数，得 $\begin{cases} A=f''_{xx}=1 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=e^2 \end{cases}$，$AC-B^2>0$ 且 $A>0$，故 $(-e,k\pi)$ 是极小值点，$f(-e,k\pi)=-\dfrac{e^2}{2}$ 为极小值.

(19)(本题满分 12 分)

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge1\right\}$，

(Ⅰ)求 D 的面积.

(Ⅱ)求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】(Ⅰ)由题设条件可知:

$$S=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx\overset{\sqrt{1+x^2}=t}{=}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{t}{(t^2-1)t}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty}=\ln(\sqrt{2}+1);$$

(Ⅱ)旋转体体积$V=\int_1^{+\infty}\pi y^2dx=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)^2}dx=\pi\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]dx=\pi(1-\frac{\pi}{4})$.

(20)(本题满分 12 分)

设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1$，$x^2+y^2-xy=2$与直线$y=\sqrt{3}x$，$y=0$围成，计算$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$.

【解析】本题目采用极坐标进行计算

$$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{1}{r^2(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}rd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{1}{(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\frac{1}{r}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\cdot\ln r\Bigg|_{\sqrt{\frac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\cdot\ln\sqrt{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(3+\tan^2\theta)\cdot\cos^2\theta}d\theta=\ln 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(3+\tan^2\theta)}d\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\ln 2.$$

(21)(本题满分 12 分)

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明:

(Ⅰ)若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

(Ⅱ)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

【解析】(Ⅰ)证明: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$, η介于0与x之间,

则 $f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2, 0<\eta_1<a$ ①

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2, -a<\eta_2<0$ ②

①+②得: $f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$ ③

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2,\eta_1]$ 上连续，则必有最大值 M 与最小值 m，即

$$m\le f''(\eta_1)\le M; m\le f''(\eta_2)\le M;\text{从而 } m\le\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\le M;$$

由介值定理得：存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$，有 $\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$，代入③

得:

$$f(a)+f(-a)=a^2f''(\xi),\text{即}f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$$

(Ⅱ)证明：设 $f(x)$在$x=x_0\in(-a,a)$ 取极值，且 $f(x)$在$x=x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$.

又

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2, \gamma\text{介于0与}x\text{之间},$$

则 $f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2, -a<\gamma_1<0$

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2, 0<\gamma_2<a$

从而 $|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{1}{2}(a-x_0)^2f''(\gamma_2)-\frac{1}{2}(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$

$$\le\frac{1}{2}\left|(a-x_0)^2f''(\gamma_2)\right|+\frac{1}{2}\left|(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$$

又 $|f''(x)|$ 连续，设 $M=\max\{|f''(\gamma_1)|,|f''(\gamma_2)|\}$，则

$$|f(a)-f(-a)|\le\frac{1}{2}M(a+x_0)^2+\frac{1}{2}M(a-x_0)^2=M(a^2+x_0^2)$$

启航学校 Qihang School ®

又 $x_0\in(-a,a)$，则 $|f(a)-f(-a)|\le M\left(a^2+x_0^2\right)\le 2Ma^2$，则

$M\ge\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$，即存在 $\eta=\gamma_1$ 或 $\eta=\gamma_2\in(-a,a)$，有

$$|f''(\eta)|\ge\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

(22)(本题满分 12 分)

设矩阵 A 满足：对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$

(Ⅰ)求 A;

(Ⅱ)求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

【解析】(I)因为 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 对任意的 x_1，x_2，x_3 均

成立，所以 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(II) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda)-2(\lambda+2)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$.

$\lambda_1=-2$ 时，$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1\\-2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\alpha_1=(0,-1,1)^T$；

$\lambda_2=2$ 时，$\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\alpha_2=(4,3,1)^T$；

$\lambda_3=-1$ 时，$\lambda_3E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\alpha_3=(1,0,-2)^T$；

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&4&1\\-1&3&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.