2023 年全国硕士研究生招生考试

数学（三）

（科目代码：303）

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 已知函数 $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，则(　　)

(A) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在

(B) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在

(D) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在

【答案】(A)

【解析】$f(0,1)=0$，由偏导数的定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 1|x|)}{x}=\sin 1\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$，所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y-1}=1，所以 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)} 存在.$$

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x\le 0\\ (x+1)\cos x, x>0\end{cases}$ 的原函数为(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), x\le 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, x>0\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, x\le 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, x>0\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), x\le 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, x>0\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, x\le 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, x>0\end{cases}$

【答案】(D)

(3) 已知 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 有界，则（）

(A) $a<0,b>0$

(B) $a>0,b>0$

(C) $a=0,b>0$

(D) $a=0,b<0$

【答案】(C)

(4) 已知 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的(　　)

(A) 充分必要条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

【答案】(A)

【解析】由条件知 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 为收敛的正项级数，进而绝对收敛；

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则由 $|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|$ 与比较判别法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛；

设 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则由 $|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\le|b_n-a_n|+|b_n|$ 与比较判别法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

(5) 设 A，B 为 n 阶可逆矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，M*为矩阵 M 的伴随

矩阵，则$\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}^* =$(　　)

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

【答案】(B)

【解析】结合伴随矩阵的核心公式，代入(B)计算知

$$\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|AA^* & -AA^*B^*+|A|B^* \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |B||A|E & -|A|B^*+|A|B^* \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B||A|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} = |A||B|E$$，故(B)正确.

(6) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$的规范形为(　　)

(A) $y_1^2+y_2^2$　　(B) $y_1^2-y_2^2$

(C) $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　(D) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】(B)

【解析】由已知$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$，

则其对应的矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+3 & -4 \\ -1 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+7)(\lambda-3)=0$,得$A$的特征值为$3,-7,0$

故选(B).

(7) 已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，若$\gamma$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，也可由与$\beta_1,\beta_2$线性表示，则$\gamma$ =(　　)

(A) $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$ (B) $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$

(C) $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$ (D) $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

【答案】(D)

【解析】设 $r=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$

则 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0$

又 $(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&-5&0\\3&1&-9&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

故 $(x_1,x_2,y_1,y_2)^T=c(-3,1,-1,1)^T,c\in R$

所以 $r=-c\beta_1+c\beta_2=c(-1,-5,-8)^T=-c(1,5,8)^T=k(1,5,8)^T,k\in R$

(8)设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(|X-EX|)=($ $)$

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{e}$ (D) 1

【答案】(C)

【解析】法 1：由题可知 $EX=1$，所以 $|X-EX|=\begin{cases}1, & X=0\\ X-1, & X=1,2,\cdots\end{cases}$，

故，$E|X-EX|=1\cdot P\{X=0\}+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}$

$$=\frac{1}{e}+\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}-(0-1)P\{X=0\}$$

$=\frac{1}{e}+E(X-1)-(0-1)\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$，选（C）

法 2：随机变量 X 服从参数为 1 泊松分布，即 $P(X=k)=\frac{1}{k!}e^{-1}(k=0,1,2,\ldots)$

期望 $E(X)=1$.

$$E\left(\left|X-E(X)\right|\right)=E\left(\left|X-1\right|\right)=1\cdot\frac{1}{0!}e^{-1}+0\cdot\frac{1}{1!}e^{-1}+1\cdot\frac{1}{2!}e^{-1}+\ldots+(k-1)\cdot\frac{1}{k!}e^{-1}+..$$

$$=e^{-1}+\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot\frac{1}{k!}e^{-1}=e^{-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{k!}e^{-1}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{-1}=e^{-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}e^{-1}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{-1}$$

$=e^{-1}+(e-1)e^{-1}-(e-1-1)e^{-1}=2e^{-1}$　选（C）.

(9) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自总体 $N(\mu_2,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，且两样本相互独立，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2$，则(　　)

(A) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(B) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

【答案】(D)

【解析】 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的样本方差 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 的样本方差 $S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$

则 $\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　$\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，两个样本相互独立

所以 $\dfrac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}{\frac{(m-1)S_1^2}{2\sigma^2}\Big/(m-1)}=\frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/2\sigma^2}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$ 选 D.

(10) 设 X_1,X_2 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma(\sigma>0)$ 是未知参数，记 $\sigma=a|x_1-x_2|$，若 $E(\sigma)=\sigma$，则 $a=$(　　)

(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

(C) $\sqrt{\pi}$ (D) $\sqrt{2\pi}$

【答案】(A)

【解析】由题可知 $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$. 令 $Y = X_1 - X_2$，则 Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\cdot 2\sigma^2}}.\ E(|Y|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\cdot 2\sigma^2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} \int_0^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} dy = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

$E(a|X_1 - X_2|) = aE(|Y|) = a\dfrac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$. 由 $E(\sigma) = \sigma$，得 $a = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. 故选 (A).

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(2 - x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}) =$ ________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty} x^2(2 - x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}) = x^2\left[2 - x(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o(\frac{1}{x^3})) - (1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}))\right]$

$= x^2\left[\dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{1}{2x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})\right] = \dfrac{2}{3}$.

(12) 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $df(x,y) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $f(1,1) = \dfrac{\pi}{4}$, 则

$f\left(\sqrt{3}, 3\right) =$ ________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】由题意可得 $f_x'(x,y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, 则

$f(x,y) = -y\cdot\dfrac{1}{y}\cdot\arctan\dfrac{x}{y} + c(y) = -\arctan\dfrac{x}{y} + c(y)$,

又因为 $f_y'(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, 可得 $c'(y) = c$，由 $f(1,1) = \dfrac{\pi}{4}$ 可得 $c = \dfrac{\pi}{2}$，

即 $f(x,y)=-\arctan\dfrac{x}{y}+\dfrac{\pi}{2}$，

故 $f(\sqrt{3},3)=\dfrac{\pi}{3}$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=$ ________.

【答案】$\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}$

【解析】令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,则 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $s''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=s(x)$.

即有 $s''(x)-s(x)=0$,解得 $s(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$.

又由 $s(0)=1,s'(0)=0$ 有 $C_1+C_2=1,C_1-C_2=0$,解得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$.

故 $s(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}$.

(14) 设某公司在 t 时刻的资产为 $f(t)$，从 0 时刻到 t 时刻的平均资产等于 $\dfrac{f(t)}{t}-t$.假设 $f(t)$ 连续且 $f(0)=0$，则 $f(t)=$ ________.

【答案】$2e^{t}-2t-2$

【解析】由题意可得方程 $\dfrac{\int_0^t f(x)dx}{t}=\dfrac{f(t)}{t}-t$，即 $\int_0^t f(x)dx=f(t)-t^2$.两边同时 t 对求导得

$f(t)=f'(t)-2t$,即 $f'(t)-f(t)=2t$.由一阶线性微分方程通解公式有：

$$f(t)=e^{\int 1dt}\left(\int 2te^{-\int 1dt}dt+C\right)$$

$$=e^{t}\left(\int 2te^{-t}dt+C\right)$$

$$=e^{t}\left[-(2t+2)e^{-t}+C\right]$$

$$=Ce^{t}-2t-2.$$

又由于 $f(0)=0$,则 $C-2=0$，即 $C=2$.故 $f(t)=2e^{t}-2t-2$.

(15)已知线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ ax_1+bx_2=2 \end{cases}$有解，其中 a，b 为常数，若

$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4$,则$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$________.

【答案】8

【解析】由已知$r(A)=r(A,b)\le 3<4$，故$|A,b|=0$

即$|A,b|=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+2\cdot 4=0$,

故$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=8$.

(16) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且$X\sim B(1,p)$，$Y\sim B(2,p)$，P∈(0,1),则$X+Y$与$X-Y$的相关系数为 ____.

【答案】$-\frac{1}{3}$

【解析】因为$X\sim B(1,p)$，所以$DX=p(1-p)$.

因为$Y\sim B(2,p)$，所以$DY=2p(1-p)$.

$Cov(X+Y,X-Y)=Cov(X+Y,X)-Cov(X+Y,Y)$

$=Cov(X,X)+Cov(Y,X)-Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)\quad=DX-DY=p(1-p)-2p(1-p)=-p(1-p)$

因为X与Y相互独立,所以

$D(X+Y)=DX+DY=3p(1-p),D(X-Y)=DX+DY=3p(1-p)$

故$\rho=\frac{Cov(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)D(X-Y)}}=-\frac{1}{3}$

三、解答题:17～22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

已知可导函数$y = y(x)$满足 $ae^x + y^2 + y - \ln(1+x)\cos y + b = 0$, 且$y(0) = 0, y'(0) = 0$

（Ⅰ） 求a，b的值.

（Ⅱ）判断$x = 0$是否为$y(x)$的极值点.

【解析】（1）在题设方程两边同时对x求导得，

$$ae^x + 2y\cdot y' + y' - \frac{\cos y}{1+x} + \ln(1+x)\cdot \sin y \cdot y' = 0 \quad ①$$

将$x=0$，$y=0$代入题设方程得，$a+b=0$;

将$x=0$，$y=0$，$y'(0)=0$代入①式得，$a-1=0$

综上：$a=1$，$b=-1$.

（2）在等式①两边再对x求导得，

$$ae^x + 2(y')^2 + 2y\cdot y'' + y'' - \frac{-\sin y\cdot y'\cdot(1+x) - \cos y}{(1+x)^2} + \left(\ln(1+x)\cdot \sin y \cdot y'\right)' = 0 \quad ②$$

将$x=0$，$y=0$，$y'(0)=0$代入②式得，$y''(0) = -a-1 = -2$.

由于$y'(0)=0$，$y''(0)=-2$，故$x=0$是$y(x)$的极大值点.

(18) (本题满分 12 分)

已知平面区域$D = \left\{(x,y)\middle| 0 \le y \le \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \ge 1\right\}$

（Ⅰ）求 D 的面积 .

（Ⅱ）求 D 绕x轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】（1）面积

$$S=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx\overset{x=\tan t}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\tan t\cdot\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc t\,dt=\ln\left|\csc t-\cot t\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln(1+\sqrt{2}).$$

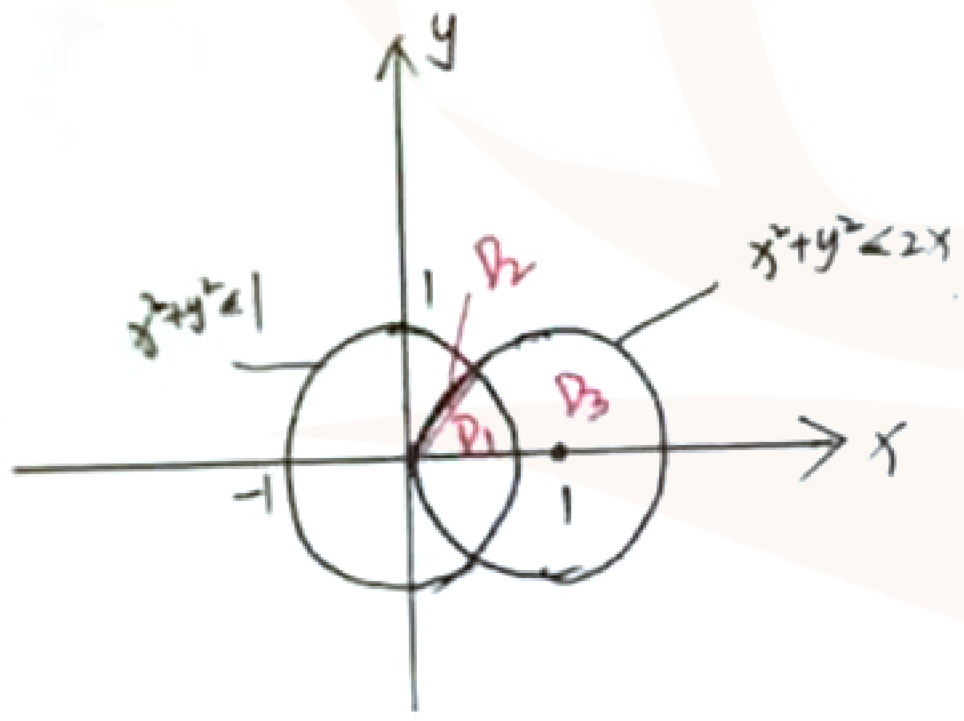
（2）旋转体体积为

$$V_x=\int_1^{+\infty}\pi y^2dx=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\pi\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\pi\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)\Big|_1^{+\infty}=\pi(1-\frac{\pi}{4}).$$

(19) (本题满分 12 分)

已知平面区域$D=\{(x,y)\,|(x-1)^2+y^2\le 1\}$，计算二重积分$\iint\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|dx\,dy$.

【解析】本题目先利用奇偶对称性化简，再切割积分区域，把积分区域分为三块，分别采用极坐标进行计算：



$$\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|d\sigma=2\iint\limits_{D_1+D_2+D_3}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+2\iint\limits_{D_2}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+2\iint\limits_{D_3}\sqrt{x^2+y^2}-1d\sigma$$

分别采用极坐标进行计算：

$$\iint\limits_{D_1}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1 r(1-r)dr=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{18}$$

$$\iint\limits_{D_2}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r(1-r)dr=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{16}{9}+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$\iint\limits_{D_3}\sqrt{x^2+y^2}-1d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}r(r-1)dr=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{8}{3}\cos^3\theta-2\cos^2\theta+\frac{1}{6}d\theta=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}.$$

所以：

$$\iint_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|d\sigma=2\iint_{D_1}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+2\iint_{D_2}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+2\iint_{D_3}\sqrt{x^2+y^2}-1d\sigma$$

$$=-\frac{\pi+32}{9}+3\sqrt{3}$$

(20) (本题满分 12 分)

设函数f(x)在$[-q\quad a]$上具有 2 阶连续倒数，证明：

（Ⅰ）若f(x) = 0，则存在$\xi\in(-a,a)$使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（Ⅱ）若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在η∈(−a, a),使得$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{a^2}|f(a)-f(-a)|$.

【解析】（1）证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$，$\eta$介于0与$x$之间，

则 $f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2,0<\eta_1<a$ ①

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2,-a<\eta_2<0$ ②

①+②得： $f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$ ③

又$f''(x)$在$[\eta_2,\eta_1]$上连续，则必有最大值M与最小值m，即

$m\leq f''(\eta_1)\leq M;m\leq f''(\eta_2)\leq M;$从而$m\leq\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\leq M;$

由介值定理得：存在$\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$，有$\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$，代入③

得：

$f(a)+f(-a)=a^2f''(\xi)$,即$f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$

（2）证明：设$f(x)$在$x=x_0\in(-a,a)$取极值，且$f(x)$在$x=x_0$可导，则$f'(x_0)=0$.

又

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2,\gamma$介于0与$x$之间 ，

则 $f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2,-a<\gamma_1<0$

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2,0<\gamma_2<a$

从而$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{1}{2}(a-x_0)^2f''(\gamma_2)-\frac{1}{2}(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$

$$\le\frac{1}{2}\left|(a-x_0)^2f''(\gamma_2)\right|+\frac{1}{2}\left|(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$$

又$|f''(x)|$连续，设$M=\max\{|f''(\gamma_1)|,\}|f''(\gamma_2)|$，则

$|f(a)-f(-a)|\le\frac{1}{2}M(a+x_0)^2+\frac{1}{2}M(a-x_0)^2=M(a^2+x_0^2)$

又$x_0\in(-a,a)$，则$|f(a)-f(-a)|\le M(a^2+x_0^2)\le 2Ma^2$，则

$M\ge\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$，即存在$\eta=\gamma_1$或$\eta=\gamma_2\in(-a,a)$，有

$$|f''(\eta)|\ge\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

(21) (本题满分 12 分)

设矩阵 A 满足对任意x_1，x_2，x_3均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A.

（Ⅱ）求可逆转矩阵 P 与对角矩阵Λ使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

【解析】(I)因为$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$对任意的$x_1$，$x_2$，$x_3$均

成立，所以$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

(II)$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda)-2(\lambda+2)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$.

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$.

$\lambda_1=-2$ 时，$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1\\-2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得特征向量 $\alpha_1=(0,-1,1)^T$；

$\lambda_2=2$ 时，$\lambda_2 E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得特征向量 $\alpha_2=(4,3,1)^T$；

$\lambda_3=-1$ 时，$\lambda_3 E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得特征向量 $\alpha_3=(1,0,-2)^T$；

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&4&1\\-1&3&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(22) (本题满分 12 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2},-\infty<x<+\infty$, 令 $Y=e^x$.

（Ⅰ）求 X 的分布函数

（Ⅱ）求 Y 的概率密度

（Ⅲ）Y 的期望是否存在？

【解析】（I）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=-\dfrac{1}{1+e^x}\Big|_{-\infty}^{x}=\dfrac{e^x}{1+e^x},x\in R$

（II）【法 1】分布函数法

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P\{X\le \ln y\}=F(\ln y)=\dfrac{y}{1+y}$；

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

【法 2】公式法

因为 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调且处处可导，当 $x\in(-\infty,+\infty)$，$y>0$，此时 $x=\ln y$，

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f(\ln y)(\ln y)', & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{e^{\ln y}}{(1+e^{\ln y})^2}\cdot\dfrac{1}{y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

（III）$EY=\int_0^{+\infty}\dfrac{y}{(1+y)^2}dy=\left(\ln(1+y)+\dfrac{1}{1+y}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\infty$，所以不存在.